

Crosslight 牛顿迭代基础

编写：盛阳
shengyang@crosslight.com.cn

1) 我们假设有 n 个方程和 n 个未知解：

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

这些方程的集合表示为 $F(X) = 0$ ，其中大写的 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

2) 任何函数都可以表示为泰勒展开：

$$F(X) = F(X_0) + F'(X_0) * (X - X_0) + F''(X_0) * (X - X_0)^2 / 2! + \dots$$

其中

X_0 是给定值

$F'(X_0)$ 表示对 X 的一阶导数代入 X_0 后的值，也就是软件中的雅可比矩阵

后面的二阶和更高阶的和 = δ

3)

假设 δ 的值忽略不计

$$\text{那么 } F(X) = F(X_0) + F'(X_0) * (X - X_0) = 0$$

转化一下变成

$$J(X_0) * H = B$$

其中

$J(X_0) = F'(X_0)$ 为雅可比矩阵

$H=(X-X_0)$ 为迭代中变量的残余量

$B=-F(X_0)$ 为方程的残余量

4)

那么，由于有了 X_0 (一开始的 guess 值和迭代中前一步得到的值)，就可以得到雅可比矩阵 J 和残余量 B

通过线性求解就得到 H ，进而得到 $X=X_0+H$ ，这个 X 又接着变成下一步迭代的 X_0

5)

因而，完整的迭代过程如下：

=====

给定初始值 X_0

||

∇

令 $X=X_0$

||

∇

if([绝对值(H)=根号($h_1^2+h_2^2+\dots+h_n^2$)>给定的变量残余量] 或者 [绝对值(残余量 B)>给定的方程残余量])

{

 计算雅可比矩阵 $J=F'(X)$

 求解线性矩阵 $J*H=B$

 更新 X 的值 $X=X+H$

}

=====

6)

额外的说明：

我们经常看到的线性方程组求解的矩阵形式 $A^*X=B$

其中的 X 对应于牛顿迭代中的参数残余量 H ，很多人会把这里的 X 混淆成线性方程组的解

X ，请注意一下